Contribuciones Científicas y Tecnológicas N° 66 - Area Matemática VI, Mayo 1984

Cohomología de Eichler de grupos de tipo Schottky*°

Rubí E. Rodríguez**

RESUMEN: Se determinan las dimensiones de los espacios $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ y $PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ de cohomología de Eichler y de cohomología parabólica de Eichler, con coeficientes polinómicos de grado a lo más 2q-2 para los grupos Γ de tipo Schottky [3], mediante el estudio de los espacios correspondientes para grupos Kleinianos Elementales.

SUMMARY: Dimensions for the Eichler cohomology space $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ and the parabolic Eichler cohomology space $PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ are computed, in the case of Schottky- type group Γ [3] and polinomial coefficients Π_{2q-2}, by studying corresponding spaces for Elementary Kleinian groups.

I. INTRODUCCION

Toda superficie de Riemann S se puede uniformizar por un subgrupo discreto G de Aut ($\hat{\mathbb{C}}$) = PSL(2, $\mathbb{C}$); es decir, existe un abierto no vacío maximal Ω en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que G actúa en forma propiamente discontinua sobre Ω y $S \simeq \Omega / G$ [2].

En la topología y el análisis de S juegan un papel importante los elementos *parabólicos* del grupo G; ellos son los conjugados a translaciones $Z \rightarrow Z + 1$ (o las matrices de valores propios repetidos $+1$ ó -1); estos elementos, en general, no se reflejan en la estructura algebraica de G y sin embargo corresponden a las "pinchaduras" de la superficie (o a las cúspides de la variedad tres-dimensional correspondiente [2]).

Por otro lado, el estudio de los espacios de formas automorfas con respecto a Ω y G ha arrojado importantes consecuencias en la teoría de superficies y variedades tres-dimensionales, e.g. el teorema de finitud de Ahlfors [2]; un área que parece unificar estos dos campos es la de Cohomología de Eichler.

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en enero de 1984.

** Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

° 1980 Mathematics Subject Classsification. Primary 20J, Secondary 32N.

II. DEFINICIONES

Sea q un número natural fijo, mayor que uno; denotaremos por

$$\Pi = \{p \in \mathbb{C}[z] : \text{gr}p \leq 2q\text{-}2\}$$

Para cada subgrupo Γ de PSL(2, $\mathbb{C}$), definamos una acción

$$\Pi \times \Gamma \xrightarrow{*} \Pi \quad \text{por}$$

$(p * \gamma)(z) = p(\gamma(z)) [\gamma'(z)]^{1-q}$, para $\gamma \in \Gamma$ y $p \in \Pi$.

Una función $\chi : \Gamma \rightarrow \Pi$ se dice un *cociclo* si se tiene

$$\chi(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \chi(\gamma_1) * \gamma_2 + \chi(\gamma_2)$$

para todo γ_1 , γ_2 en Γ, y se dice una *cofrontera* si existe $p \in \Pi$ tal que

$$\chi(\gamma) = p * \gamma - p.$$

para todo γ en Γ; en ese caso, se anota $\chi = \chi_p$.

El conjunto de cociclos se denota por $Z^1(\Gamma, \Pi)$ y el conjunto de cofronteras por $B^1(\Gamma, \Pi)$; es claro que $B^1(\Gamma, \Pi)$ es un subespacio de $Z^1(\Gamma, \Pi)$, y definimos el *espacio de cohomología de Eichler* de Γ con coeficientes en Π por:

$$H^1(\Gamma, \Pi) = Z^1(\Gamma, \Pi) / B^1(\Gamma, \Pi)$$

Si χ es un cociclo, denotaremos por $[\chi]$ su clase en $H^1(\Gamma, \Pi)$.

Para cada G subgrupo de Γ, hay un homomorfismo natural $\psi_G : H^1(\Gamma, \Pi) \rightarrow H^1(G, \Pi)$ inducido por restricciones; se define entonces el *espacio de cohomología parabólica de Eichler* de Γ con coeficientes en Π por

$$PH^1(\Gamma, \Pi) = \cap \text{ Ker } \psi_G,$$

donde la intersección se toma sobre todos los subgrupos G cíclicos generados por elementos parabólicos de Γ.

Una útil caracterización de $PH^1(\Gamma, \Pi)$ es la siguiente: si $[\chi]$ es un elemento de $H^1(\Gamma, \Pi)$, entonces $[\chi] \in PH^1(\Gamma, \Pi)$ si y sólo si $\forall_\gamma \in \Gamma$, γ parabólico, existe $p \in \Pi$ tal que $\chi(\gamma) = p * \gamma - p$.

Se define también el subespacio $I(\Gamma)$ de Π, formado por los polinomios invariantes bajo la acción de Γ; es decir, $I(\Gamma) = \text{Ker } \phi$, donde

$$\phi : \Pi \rightarrow B^1(\Gamma, \Pi)$$

es el homomorfismo $\phi(p) = \chi_p$, para $p \in \Pi$.

Proposición [1]: Se tiene:

$\dim H^1(\Gamma, \Pi) = \dim Z^1(\Gamma, \Pi) + \dim I(\Gamma) + 2q\text{-}1$

Demostración:

ϕ es sobreyectiva.

III. CÁLCULO DE DIMENSIONES PARA ALGUNOS GRUPOS ELEMENTALES

Lema 1:

Sea Γ un grupo cíclico generado por una transformación A loxodrómica o hiperbólica; i.e. A es conjugada a $z \to kz$, con $|k| > 1$.

Entonces $\dim H^1(\Gamma, \Pi) = 1 = \dim PH^1(\Gamma, \Pi)$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A(z) = kz$, con $|k| > 1$.
Entonces

$$I(\Gamma) = < z^{q-1} > \quad y$$

$\dim B^1(\Gamma, \Pi) = 2q\text{-}1 = \dim I(\Gamma) = 2q\text{-}2$

Para calcular $\dim Z^1(\Gamma, \Pi)$, notemos que si χ es un cociclo, entonces $\chi(A)$ determina completamente $\chi(A^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, y que $\chi(A)$ puede ser cualquier elemento de Π. Entonces $Z^1(\Gamma, \Pi)$ es isomorfo a Π y se tiene el resultado.

Lema 2:

Sea Γ un grupo abeliano discreto de rango dos con generadores A y B parabólicos.

Entonces $\dim H^1(\Gamma, \Pi) = 2$ y $\dim PH^1(\Gamma, \Pi) = 1$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $A(z) = z+1$ y $B(z) = z+\tau$, con Im τ positiva.

Entonces $I(\Gamma) = \mathbb{C}$ y $\dim B^1(\Gamma, \Pi) = 2q\text{-}2$.
Además, como A y B conmutan, para todo cociclo χ se obtiene

$$\chi(A) * B + \chi(B) - X(B) * A - \chi(A) = O$$

Calculando, se obtiene que $gr\chi(A) = gr\chi(B)$ y que $\chi(A)\text{-}\chi(A)(O)$ determina $\chi(B) - \chi(B)(O)$.

Así, $\dim Z^1(\Gamma, \Pi) = 2q$ y $\dim H^1(\Gamma, \Pi) = 2$.

Por otro lado, se tiene que existe $p \in \Pi$ tal que $\chi(A) = p * A\text{-}p$ si y sólo si $gr\,\chi(A) \leq 2q\text{-}2\text{-}1$; como $gr\chi(A) = gr\,\chi(B)$, se obtiene:

$[\chi] \in PH^1(\Gamma, \Pi)$ si y sólo si $gr\,\chi(A) \leq 2q\text{-}2\text{-}1$; pero dado $\chi(A)$ cualquier polinomio de grado a lo más 2q-2-1, existe un polinomio $\tilde{p}$ de grado a lo más 2q-2 tal que $\chi(A) - \chi_{\tilde{p}}$ está en la clase de χ, con $\chi(A) - \chi_{\tilde{p}}$ cualquier constante; es decir, $PH^1(\Gamma, \Pi) \simeq \mathbb{C}$ y $\dim PH^1(\Gamma, \Pi) = 1$.

Proposición 2:

Sea Γ un subgrupo no-elemental de $PSL(2, \mathbb{C})$; es decir, la órbita bajo Γ de todo $z_o \in \hat{\mathbb{C}}$ tiene cardinalidad no finita.

Entonces $I(\Gamma) = O$.

Demostración:

Sea $p \in I(\Gamma)$; si p no fuera constante y z_o fuera una raíz de p, toda la órbita (no finita) de z_o sería también raíz, contradicción.

Si p fuera constante diferente de cero, tendríamos $[g'(z)]^{1-q} = 1$ para cada $g \in \Gamma$, $z \in \mathbb{C}$, y entonces $g'(z)$ sería raíz (1-q)-ésima de la unidad para cada $g \in \Gamma$, contradicción.

Corolario

Si Γ es no-elemental, entonces
$\dim H^1(\Gamma, \Pi) = \dim Z^1(\Gamma, \Pi) - (2q - 1)$

IV. CÁLCULO DE DIMENSIONES PARA GRUPOS DE TIPO SCHOTTKY

Lema 3:

Si Γ es producto libre de Γ_1 y Γ_2, entonces

$Z^1(\Gamma, \Pi) = Z^1(\Gamma_1, \Pi) \oplus Z^1(\Gamma_2, \Pi)$

Demostración:

Cálculo.

Teorema:

Sea Γ un grupo [3] de tipo Schottky (k, g-k) con g mayor o igual a 2, k entre cero y g.
Entonces se tiene:

$\dim H^1(\Gamma, \Pi) = (2q - 1)(g - 1) + k$

y $\quad \dim PH^1(\Gamma, \Pi) = (2q - 1)(g - 1)$

Demostración:

Se tiene que Γ es no-elemental y es producto libre de k grupos abelianos parabólicos de rango 2 y *g-k* grupos cíclicos loxodrómicos o hiperbólicos:

$\Gamma = < A_1, B_1 : [A_1, B_1] = 1 > * \ldots * < A_k, B_k : [A_k, B_k] = 1 > * < C_1 > * \ldots * < C_{g\text{-}k} >$

Por el lema 3, se tiene que

$$(*)\; Z^1(\Gamma, \Pi) = [\bigoplus_{j=1}^{k} Z^1(< A_j, B_j : [A_j, B_j] >, \Pi)] \oplus [\bigoplus_{e=1}^{g\text{-}k} Z^1(< C_e >, \Pi)]$$

Entonces, por lemas 1 y 2, se sigue:

$$\dim Z^1(\Gamma, \Pi) = (2q)k + (2q - 1)(g - k) = (2q - 1)g + k$$

De las proposiciones 1 y 2, se obtiene

$\dim H^1(\Gamma, \Pi) = (2q - 1)(g - 1) + k$

Cada $\chi \in Z^1(\Gamma, \Pi)$ se descompone de acuerdo a

(*) en: $\chi = \sum_{j=1}^{k} \chi_j + \sum_{l=1}^{g-k} \tilde{\chi}_l$, y es claro que χ es parabólico si y sólo

si todos los χ_j lo son; si y sólo si gr $\chi_j(A_j) \leq 2q\text{-}2\text{-}1$ $\forall j$, de acuerdo a la demostración del lema 2.
Se deduce así que

$$\dim PZ^1(\Gamma, \Pi) = k(2q - 1) + (g - k)(2q - 1) = (2q - 1)g$$

y

$$\dim PH^1(\Gamma, \Pi) = (2q - 1)g - (2q - 1) = (2q - 1)(g - 1)$$

REFERENCIAS

1. I. Kra, *On cohomology of Kleinian groups IV. The Ahlfors - Sullivan construction of holomorphic Eichler integrals, to appear.*
2. I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian Groups, Benjamin, Reading, Massachussetts, 1972.*
3. R.E. Rodríguez, *On Schottky - Type groups with applications to Riemann Surfaces with Nodes, I and II, Complex Variables, 1* (1983), 279-310.